

Вместо предельных: $U \in H, \|U\|^2 \leq 1, \langle C, U \rangle = 0$; $U \in H, \|U\|^2 \leq 1, \langle C, U \rangle = 0$; $U_0 = \{U \in H \mid \|U\|^2 \leq 1\}$

→ Принцип философия

Distance

08/04 Метод штрафных ф-ций

Наличие в оптимизационных задачах ограничений довольно часто вызывает дополнительные затруднения при их численном решении. Метод штрафных функций (мет. штрафов) позволяет при определенных условиях заменить строгое требование соблюдения всех ограничений на разрешение нарушения некоторых из них, например, тех, учет которых вызывает наибольшие неудобства при численном решении. Но речь идет не о полном снятии таких ограничений, а об их учете в более мягкой форме, предполагающей штрафные санкции за их нарушение.

Рассмотрим одну из возможных схем применения мет. штрафов к задаче мин. с ограничениями в глоб. пр-ве H , $\dim H \leq \infty$: $J(U) \rightarrow \inf, U \in U \subset H$, где $U = \{U \in U_0 \mid g_1(U) \leq 0, \dots, g_m(U) \leq 0, g_{m+1}(U) = 0, \dots, g_{m+s}(U) = 0\}$ (1)

Штраф будет "выписываться" за нарушение ограничений типа рав-в и нерав-в, задаваемых ф-циями $g_i(U): H \rightarrow \mathbb{R}^1$

U_0 - широкое, U - узкое

Неструктурированные огранич-я, задаваемые в зад. (1) мн-вом U_0 , мы считаем "терпимыми", и обязуемся их не нарушать. Случаи, когда $U_0 = \emptyset$ или отсутствуют огранич-я типа рав-в ($s=0$) или нерав-в ($m=0$), не исключ-ся, но хотя бы одно из огранич-й типа рав-в или нерав-в все же должно присутствовать, иначе исчезнет объект оптимизации.

4. 1 из наиболее популяр. способов штрафов-ния. За наруш-я огранич-й типа нерав-в будем применять индивидуал. штрафы типа срезки: $g_i^+(u) = \max\{g_i(u), 0\}$, $i = \overline{1, m}$. (2) За наруш-я огранич-й типа рав-в будем использовать модули: $g_i^+(u) = |g_i(u)|$, $i = \overline{m+1, m+s}$. (3) Из индивидуал. штрафов (2), (3) составл-ся общий (суммарный) штраф $P(u) = \sum_{i=1}^{m+s} (g_i^+(u))^{p_i}$, $p_i \geq 1$, $i = \overline{1, m+s}$. (4). Показатели степеней p_i в (4) можно задавать по-разному, а на прак-е довольно часто берут одинаковые знач-я $p_i = 2$, $i = \overline{1, m+s}$.

Отметим следующие важные св-ва введенных штраф. ф-ций. Во-первых, $P(u) \geq 0$, $\forall u \in N$, а, во-вторых, $u \in U_0 \Leftrightarrow P(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u \in U_0, \\ g_i^+(u) = 0, \forall i = \overline{1, m+s} \end{cases}$ (5)

Общий штраф с коэфф-ми $A_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$, добавл-ся к исходной ф-ции $F(u)$ и осущ-ся переход от исходной постановки (1) на мн-ве U к посл-ти задач мин. штрафованной ф-ции на "терпимом" мн-ве U_0 : $[F_k(u) = F(u) + A_k P(u) \rightarrow \inf, u \in U_0, k = 1, 2, \dots]$ (6). U_k - приобл-т. реш-е зад. (6): $u_k \in U_0$, $F_{k*} = \inf_{u \in U_0} F_k(u) \leq F_k(u_k) \leq F_{k*} + \varepsilon_k$, $\varepsilon_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$ (7). Метод отыскания таких

Компенсаторий:

Опр $\{P_k(u)\}$ — итр. ф-ция мн-ва U на мн-ве U_0 , if:

1) $P_k(u)$ опр. на U_0 , ≥ 0 на U_0

2) $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k(u) = \begin{cases} 0, & u \in U, \\ +\infty, & u \in U_0 \setminus U \end{cases}$

Напр.,
 $A_k = k$

Примеры: 1) $P_k(u) = A_k \chi(u)$, где
 $\chi(u) = \begin{cases} 1, & u \in U_0 \setminus U, \\ 0, & u \in U, \end{cases}$; $A_k > 0$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = +\infty$
числ. посл-ть

Это итр. ф-ция, но слишком грубая (хоть и простая)

2) $P_k(u) = A_k P(u)$, $P(u) = \sum_{i=1}^m \max\{g_i(u), 0\} + \sum_{i=m+1}^s |g_i(u)|$; $A_k > 0$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = +\infty$ итрасная
 $P(u) = 0$, if $u \in U$; но: она не дискр.

точек $u_k \in U_0$ не конкретизируется. Можно приписать одну из уже рассмотренных нами вычислит. процедур. Например, 1 из градиент. мет-ов.

↓ (о сх-ти мет. экстраф. ф-ций) [Н-люб. пр-во, мн-во U_0 с Н слабо замкн. в Н, исходная ф-ция $Y(u)$ и все индивидуал. экстраф. $g_i^+(u)$ слабо полунепр. снизу на U_0 .] Также нижняя грань ф-ции $Y(u)$ на "терпимом" мн-ве U_0 конечна: $Y_0 = \inf_{u \in U_0} Y(u) > -\infty$, а δ -расширение $U(\delta) = \{u \in U_0 \mid g_i^+(u) \leq \delta, i=1, m+s\}$ допустимого мн-ва U опр. в Н при некот. $\delta > 0$. Тогда, if $\theta_k \rightarrow +\infty$ и $\varepsilon_k \rightarrow 0$, то д/эп-тов u_k , определенных из усл. (7), имеет место сх-ть по ф-ции $Y(u_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} Y_*$ (8), а ч. самой посл-ти $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ имеют-ся слаб. в Н предел точки, причем каждая из них принадлежит мн-ву оптимальн. реш-ий U_* зад. (1).

▲ Из эп-ти снизу ф-ции $Y(u)$ на U_0 , неотриц-ти $P(u)$ и неотриц-ти $R(u)$ имеем: $\Phi_k(u) = Y(u) + \theta_k R(u) \geq Y_0$, $\forall u \in U_0 \Rightarrow \Phi_{k*} \geq Y_0 > -\infty \Rightarrow$, по крайней мере, $\exists$ эп-ты u_k , удовлетворяющ. усл. (7). Справедливы нер-ва: $Y(u_k) \leq \Phi_k(u_k) \stackrel{(7)}{\leq} \Phi_{k*} + \varepsilon_k \leq \forall u \in U_0 \{Y(u) \leq \Phi_k(u) + \varepsilon_k = Y(u) + \theta_k R(u) + \varepsilon_k$. В эти нер-ва можно подставлять $\forall$ эп-ты $u \in U_0$, и if взять $\inf$ и перейти к верх. пределу при $k \rightarrow \infty$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} Y(u_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(u_k) \leq \Phi_{k*} \leq Y_*$ (9). Конечность появившейся в (9) нижней грани Y_* будет $\Rightarrow$ из вложения $U \subset U_0$ и конечности Y_0 . Непосредственно из (7) извлеч-ся оценка д/знач-ий суммарного экстрафа: $0 \leq R(u_k) \leq \frac{\Phi_{k*} - Y_0 + \varepsilon_k}{\theta_k}$. По усл. $\theta_k \rightarrow \infty$, поэтому, учитывая (9), получаем сх-ть: $\lim_{k \rightarrow \infty} R(u_k) = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} g_i^+(u_k) = 0, \forall i=1, m+s$ (10). Из (10) $\Rightarrow$, что д/ $\delta > 0$ и u_k

усл. $\downarrow$ найдется такой достаточно большой номер $k_0(\delta)$, что
 $\forall k \geq k_0(\delta) \quad g_i^+(u_k) \leq \delta, i = \overline{1, m+s} \Leftrightarrow \forall k \geq k_0(\delta) \quad u_k \in \mathcal{U}(\delta)$. Введем
 из посл-ти $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ п/посл-ть $\{u_{k_m}\}_{m=1}^\infty \subset \{u_k\}_{k=1}^\infty$, на к. рас-
 сужается ниткой $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{Y}(u_{k_m}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{Y}(u_k)$ (11). Тогда для
 всех достаточно больших номеров $m \geq m_0(\delta)$ будем иметь
 включения $u_{k_m} \in \mathcal{U}(\delta)$, а поскольку ин-во $\mathcal{U}(\delta)$ по усл.
 в шльб. пр-ве H , то у п/посл-ти $\{u_{k_m}\}_{m=1}^\infty$ имеются слаб.
 в H предел. точки. $\exists u_0$ одна из таких т. Не ограничи-
 вая общности, будем считать, что $u_{k_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u_0$ слабо в H . Т.к.
 $u_{k_m} \in \mathcal{U}_0$ и ин-во $\mathcal{U}_0$ по усл. слабо замкн., то $u_0 \in \mathcal{U}_0$. То усл.
 все индивид. штрафы $g_i^+(u)$ слабо полунепр. снизу, поэтому
 $0 \leq g_i^+(u_0) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} g_i^+(u_{k_m}) = \{1\} = 0$. Это означает, что $u_0 \in \mathcal{U}$, т.е.
 слаб. предел т. u_0 явл-ся допустимой в исход. зад. (1). Ф-ция
 $\mathcal{Y}(u)$ также слабо полунепр. снизу $\Rightarrow \mathcal{Y}_* \leq \mathcal{Y}(u_0) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{Y}(u_{k_m}) =$
 $= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{Y}(u_{k_m}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{Y}(u_k) \leq \{0\} \leq \mathcal{Y}_*$. Тем самым,
 утв. (8) в сх-ти по ф-ции доказано. Из последних нер-в и
 установленного включения $u_0 \in \mathcal{U} \Rightarrow$ что $u_0 \in \mathcal{U}_*$, т.е. т. u_0
 явл-ся одним из оптимальных в исход. зад. (1). Поскольку
 предел т. u_0 выбиралась произвольно, то справедливо и
 для утв. $\downarrow$ о слаб. сх-ти по ат-у.

Дост.: упрощено ин-во $\oplus$
 следст.: 1 задание ∞ много задач $\ominus$
 $\oplus$ приближ. решаем зад. $\ominus$ результаты в
 анал. излож.

Замеч. 1 Требование слаб. полунепр-ти снизу по отно-
 сию к индивид. штрафам $g_i^+(u), i = \overline{1, m+s}$, отбрасывающим за-
 граничающую типа рав-в, в бесконечномерн. пр-вах явл-ся
 весьма жестким. Так, например, далеко не самое слож-
 ное огранич-е $g(u) = \|u\| - 1 = 0$, задающее в шльб. пр-ве H еди-
 ничную сферу с центром в 0, будучи оштрафованным по
 стандарт. "тарифу" (3), приведет к ф-ции $g^+(u) = \|\|u\| - 1\|$, а

не явл-ся слабо полунепр. снизу. Например, на эл-тах
ОНБ $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, λ , как известно, слабо в H сж-ся к 0, имеем:
 $\lim_{k \rightarrow \infty} g^+(e_k) = 0 < g^+(0) = 1$. В бесконечномер. пр-вах
это требование сказ-ся близким к требованию м-
нейности огранич-й типа Фав-в. В простр-вах конечной
размер-ти подобных неудобств не возникает, поскольку
дл-е непр. ф-ций $g(u)$ их индивид. изображ-я $g^+(u)$ вида (3)
также непр.

! Зам. 2 Нельзя утверждать, что описанный выше
переход от исходной одной оптимиз. зад. (1) с огранич-
-ми к ∞ послед-ти задач (7), но зато с ослабленными
огранич-ми, целесообразен в $\forall$ случае, но, по крайней
мере, его полезно иметь в виду и применять, исходя из
уменьшения технологических возмож-тей, соединений
трудоемкости и т.п.

$\mathcal{I}(u) = e^{-u} \rightarrow \inf, \quad \underline{u}_{np}$
 $u \in \mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^1 : u e^{-u} = 0\}$
 Здесь мет. устр. не
 работает
 $u_* = 0, \quad \mathcal{I}_* = 1$

$\mathcal{I}(u) = e^{-u} \rightarrow \inf, u \in \mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^1 : u = 0\}$ - здесь уже работает

Пример 1 (мет. устр. ф-ции)
 $\mathcal{I}(u) = x^2 + xy + y^2 \rightarrow \inf, u = (x, y) \in \mathcal{U} =$
 $= \{u \in \mathbb{E}^2 : x+y=2\} \rightarrow u_*$
 $u_0 \quad \mathcal{I}_1(u) = x+y-2=0$
 $\mathcal{I}_* = 3, u_* = (1, 1)$

Воспользуемся методом: $\Phi_k(u) = \mathcal{I}(u) +$
 $+ \lambda_k P(u) = x^2 + xy + y^2 + k \cdot (x+y-2)^2,$
 $k=1, 2, \dots; (x, y) \in \mathbb{E}^2$

$$\Phi'_k(u) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x+y+2k(x+y-2) \\ x+2y+2k(x+y-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_k = (x_k, y_k): x_k = y_k = \frac{4k}{3+4k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$$

$$u_k = (x_k, y_k) \rightarrow (1, 1)$$

$$\langle \mathcal{I}'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0 - \text{крит. пем-а}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \quad 3(x+y) - 6 = 3 \cdot 2 - 6 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0$$